Theoretische Physik II – Elektrodynamik

Text: Arne Babenhauserheide (http://draketo.de)
Layout und TEX-mojo: René Kraneis
Erstellt auf Basis der Vorlesung von
Professor Georg Wolschin (http://wolschin.uni-hd.de)

9. Mai 2007

Inhaltsverzeichnis

Anmerkung: Bisher bekomme ich Nabla nicht ganz hin, wie ich es will.

Es sollte so aussehen: $\vec{\nabla}$, aber obwohl das genau seine Definition ist, sieht es so aus: $\tilde{\nabla}$.

Bitte ignoriert das einfach, bis ich das Problem gefunden habe, oder der TeX-Wiz Zeit dafür hatte :).

1 Einleitung

17.4.2007

(Die Stunde begann mit einem Vortrag über die historische Entwicklung der Physik. Als Beispiele bespricht er die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit durch Galileo Galilei,[1] Ole Rømer[2] und Armand Hippolyte Louis Fizeau[3]. Der heute gültige Wert für die Lichtgeschwindigkeit beträgt $c = 2,99792438 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$. Das Skript dieser Einführung ist auf seiner Webseite verfügbar[4])

1.1 Maßsysteme

- $\boxed{\text{Gaußsches Maßsystem (abgeleitet vom CGS-System)}}$
- SI-System (abgeleitet vom MKS-System)
- Heavyside-Lorentz (nahe am Gauß-System)
- elektrostatische Einheiten
- elektromagnetische Einheiten

1.1.1 Begründung für die Wahl des Gaußschen Maßsystems

Wir verwenden das Gaussche Maßsystem, da es einfacher für uns ist als das Heavyside Lorentz-System (das am saubersten ist) und es trotzdem noch Spaß macht damit zu rechnen.

Das elektrische Feld $\vec{E}$ und die dielektrische Verschiebung $\vec{D}$, die magnetische Induktion $\vec{B}$ udn das magnetisches Feld $\vec{H}$ haben im CGS-System die gleiche Dimension (und Einheit), nicht aber im SI-System. Außerdem sind im SI-System ε_0 und μ_0 nötig, die im Gauß-System 1 sind. (Dielektrizitäts- bzw. Permeabilitätskonstante des Vakuums)

Für uns bedeutet das: Wir rechnen in Zentimeter, Gramm, Sekunde, Die Einheit für die magnetische Flussdichte ist das Gauß ($1G = 10^-4$ Tesla). Für die magnetische Feldstärke haben wir das Oestersted ($1Oe = 1G$).

1.1.2 Rechtliche Situation

Ich muss hier allerdings auf die in Deutschland geltende Rechtslage aufmerksam machen: Nach dem Gesetz über Einheiten im Messwesen (MeßEinhG)[5] vom 1. 1.1986 gilt in Deutschland:

§7 Bußgeldvorschrift

1. Ordnungswidrig handelt, wer

[1]direkte Lichtlaufzeit zwischen zwei Punkten: $c = \infty$. Er zweifelte allerdings selbst an diesem Ergebnis

[2]Unterschied der Lichtlaufzeit bei jupiternaher und jupiterferner Betrachtung des Austritts des Mondes Io aus dem Schatten des Jupiter: $c = 2,14 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

[3]„Zahnradmethode“: $c = 3,14 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

[4]Webseite von Professor Georg Wolschin: http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/ q61/ed1.pdf

[5]http://www.gesetze-im-internet.de/

a) im geschäftlichen Verkehr entgegen § 1 Abs. 1 Größen nicht in gesetzlichen Einheiten angibt oder für die gesetzlichen Einheiten nicht die festgelegten Namen oder Einheitenzeichen verwendet,

b) entgegen § 6 eine Auskunft nicht, nicht rechtzeitig, unvollständig oder unrichtig erteilt oder

c) einer Vorschrift einer nach § 3 Abs. 1 Nr. 4 oder 5 ergangenen Rechtsverordnung zuwiderhandelt, soweit die Rechtsverordnung für einen bestimmten Tatbestand auf diese Bußgeldvorschrift verweist.

2. Die Ordnungswidrigkeit kann mit einer Geldbuße geahndet werden.

Allerdings gilt diese Vorschrift nur im geschäftlichen Verkehr, also wenn ihr was verkaufen wollt.

Themen:

- Elektrische und magnetische Felder
- Erzeugung der Felder durch Ladungen und Ströme
- Wirkung der Felder auf Materie durch elektromagnetische Kräfte

1.2 Grundgleichungen der Elektrodynamik

1.2.1 Raumladungsdichte

$\rho(\vec{r}) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$

1.2.2 Gesamtladung im Volumenelement V

$q(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}^3r\, \rho(\vec{r})$

1.2.3 Punktladung q an verschiedenen Punkten r_i

$\rho(\vec{r}) = \sum_8 iq_i\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i)$

1.2.4 Mit der delta-Distribution:

$\int_V \mathrm{d}^3r f(r)\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{cases} f(\vec{r}_0),\ r_0 \in V(eingeschlossen) \\ 0,\ r_0 \notin V(nicht\, eingeschlossen) \end{cases}$

1.2.5 Die Theta Funktion

$\Theta(R - r_0) = \begin{cases} 1, R \geq r_0 \\ 0, R < r_0 \end{cases}$, eine Stufenfunktion

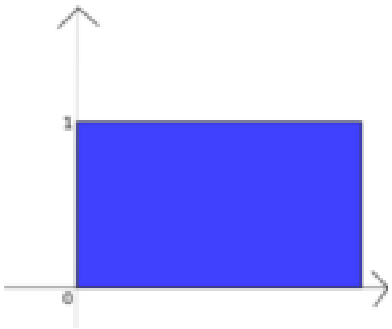

Abbildung 1: Die Theta Funktion

1.2.6 analog ist die Flächenladungsdichte definiert als

$\sigma(\vec{r}) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}f} \begin{matrix} Ladung \\ Flaechenelement \end{matrix}$

1.2.7 Strom

I: Ladung q, die pro Zeiteinheit dt durch eine Fläche F fließt:

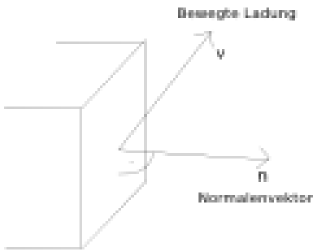

Abbildung 2: Ladungsfluss durch Fläche

$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$

mit $\mathrm{d}q = \underbrace{\int_F \vec{v}\mathrm{d}t}_{Weg} \overbrace{\vec{n}\mathrm{d}f}^{\mathrm{d}\vec{f}}$

$\vec{v} \equiv$ mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger $= \vec{v}(\vec{r}, t)$

$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \int_F \underbrace{\vec{v}(\vec{r}, t)\rho(\vec{r}, t)}_{\substack{(Ladungsdichte) \\ (\vec{\jmath}(\vec{v}, t) = \rho, \vec{v})}} \mathrm{d}\vec{f}$

$\Rightarrow I = \int_F \vec{\jmath}(\vec{r}, t)$

Zu 1 Einleitung

20.4.2007

Grundgleichungen der Elektrodynamik

Raumladungsdichte $\rho(\vec{r}) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$

Ladung im Volumenelement $V \;\; q(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}^3r\, \rho(\vec{r})$

... bei Punktladungen $q_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \delta^3(\vec{r}_i - \vec{r})$

Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r}) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}f}$

Strom $I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \int_F \mathrm{d}\vec{f}\, \vec{\jmath}(\vec{r},t)$

1.2.8 Ladungserhaltung und Kontinuitätsgleichung

Wir betrachten die zeitliche Änderung der Gesamtladung $\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = \int_V \mathrm{d}^3r\, \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}$ (Ladung im Volumen) bzw. $\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = -I(t) = -\int_F \mathrm{d}\vec{f}\, \vec{\jmath}(\vec{r},t)$ (Stromfluss durch die das Volumen begrenzende Fläche).

1.2.9 Gauß'scher Satz

$\boxed{\int_F \mathrm{d}\vec{f}\, \vec{a}(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}^3r\ \mathrm{div}\, \vec{a}(\vec{r})} \equiv \int_V \mathrm{d}^3r\, \vec{\nabla}\vec{a}(\vec{r})$, also $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$[6] $= -\int_V \mathrm{d}^3r\, \vec{\nabla}\vec{\jmath}(\vec{r},t) = \int_V \mathrm{d}^3r\, \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}$ für alle Volumina V. Daher gilt für die Integranden $\boxed{\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \tilde{\nabla}\cdot\vec{\jmath}(\vec{r},t) = 0}$[7].

1.2.10 Maxwell-Gleichungen (im Gauß'schen Maßsystem)

Die elektrischen Ladungen sind die Quellen des elektrischen Feldes ($\vec{E}$)

Ladungen und Ströne erzeugen $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{B}(\vec{r},r) - \frac{1}{c}\frac{\partial E(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{e\pi}{c}\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\, j(\vec{r},t)}$

$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{r},t) = 4\pi\,\rho(\vec{r},t)}$

$\boxed{\mathrm{rot}\,E(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} = 0}$

$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r},t) = 0}$

Da die Felder in allen drei Raumrichtungen bestehen (E_x, E_y, E_z), führt Maxwell uns auf 8 Gleichungen für 6 Unbekannte.

1.2.11 Vektoranalysis

Für $\mathrm{grad}, \mathrm{div}, \mathrm{rot}$

[6] Strom durch die Oberfläche
[7] Kontinuitätsgleichung

1.2.12 Gradient eines Skalarfeldes

$\operatorname{grad}\varphi = (\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (\varphi(x,y,z)) = \tilde{\nabla} \cdot \varphi(x,y,z)$
$\Rightarrow \operatorname{grad}\varphi = \tilde{\nabla} \cdot \varphi$
$\tilde{\nabla} \cdot (\varphi + \psi) = \tilde{\nabla} \cdot \varphi + \tilde{\nabla} \cdot \psi$, d.h. es gilt das Distributivgesetz
$\tilde{\nabla} \cdot (\varphi\psi) = \tilde{\nabla} \cdot \varphi)\psi + \tilde{\nabla} \cdot \psi)\varphi = \psi\, \tilde{\nabla} \cdot \varphi + \varphi\, \tilde{\nabla} \cdot \psi$, das heißt es gilt die Produkt-Regel.

1.2.13 Divergenz eines Vektors $\vec{a}$

$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \tilde{\nabla} \cdot \vec{a} = (\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}) \cdot \vec{a}(x,y,z)$
$\Rightarrow \vec{a} = \tilde{\nabla} \cdot a$

1.2.14 Zweimalige Anwendung von $\tilde{\nabla} \cdot$

$\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\nabla} \cdot \varphi) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\,\varphi$
Kurz: $\boxed{\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} \cdot = \Delta}$; In der Präsenz-Übung: $\tilde{\nabla} \times (\tilde{\nabla} \times \vec{a}) = \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\nabla} \cdot \vec{a}) - \Delta\,\vec{a}$
$\tilde{\nabla} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \tilde{\nabla} \cdot \vec{a} + \tilde{\nabla} \cdot \vec{b}$
$\Delta(\varphi + \psi) = \Delta\,\varphi + \Delta\,\psi$

1.2.15 Rotation eines Vektors

$\operatorname{rot}\vec{a} = \tilde{\nabla} \times \vec{a}$
$(\operatorname{rot}\vec{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}$
$(\operatorname{rot}\vec{a})_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}$
$(\operatorname{rot}\vec{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$
$\tilde{\nabla} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \tilde{\nabla} \times \vec{a} + \tilde{\nabla} \times \vec{b}$, d.h. es gilt das Distributivgesetz
$\tilde{\nabla} \times (\tilde{\nabla} \cdot \varphi) = 0 = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$
$\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\nabla} \times \vec{a}) = 0 = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0$
$\tilde{\nabla} \times (\tilde{\nabla} \times \vec{a}) = \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\nabla} \cdot \vec{a}) - \Delta\,a = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\,a$